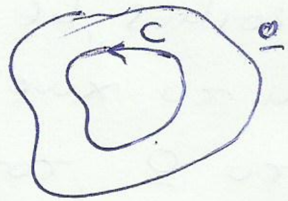
Το θεώρημα Cauchy:

Έστω $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και Ω απλά συνεκτικός τόπος (δηλ. τόπος που περιέχει το εσωτερικό κάθε απλής και κλειστής καμπύλης του). Εάν C είναι μια κατά τμήματα κλειστή διαφορίσιμη καμπύλη τότε ισχύει

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$



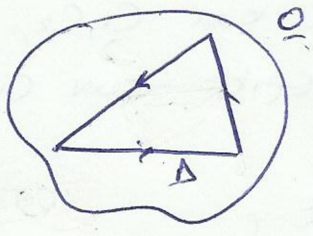
Το θεώρημα Goursat:

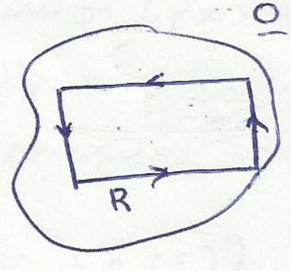
i) Έστω $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη στον τόπο Ω, ο οποίος περιέχει το ορθογώνιο R που καθορίζεται από τις ανισότητες: $\alpha \le x \le \beta$ και $\gamma \le y \le \delta$ τότε

$$\oint_{\partial R} f(z)\,dz = 0$$ με ∂R: το σύνορο του R κλειστή καμπύλη

ii) Έστω $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη στον τόπο Ω, ο οποίος περιέχει την τριγωνική καμπύλη Δ. Τότε, ισχύει:

$$\oint_{\Delta} f(z)\,dz = 0$$



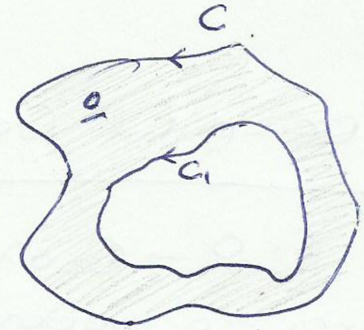


Πορίσματα/Συνέπειες του Θεωρήματος Cauchy-Goursat

Πόρισμα 1ο:

Έστω $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη και Ω τόπος.
Εάν C και C_1 δύο απλές κλειστές καμπύλες, κατά τμήματα διαφορίσιμες, με τη C_1 να βρίσκεται στο εσωτερικό της C, και το χωρίο που βρίσκεται μεταξύ των C και C_1 είναι το Ω, τότε ισχύει:

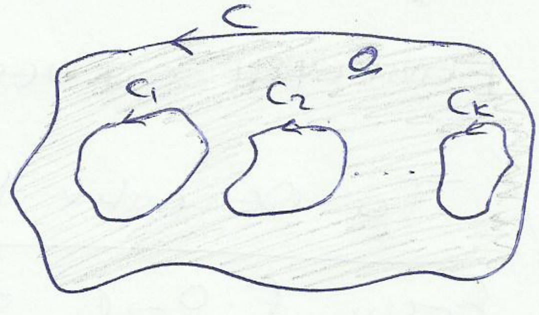
$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz$$



Πόρισμα 2ο:

Έστω f ολόμορφη και Ω τόπος.
Εάν C και $C_1, C_2, \dots, C_k$ κλειστές καμπύλες, κατά τμήματα διαφορίσιμες, με $C_1, C_2, \dots, C_k$ να βρίσκονται στο εσωτερικό της C, και το χωρίο που βρίσκεται μεταξύ των C και $C_1, C_2, \dots, C_k$ (δηλ. στο εσωτερικό της C και στο εξωτερικό των $C_1, C_2, \dots, C_k$) περιέχεται στο Ω τότε ισχύει:

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{k} \int_{C_i} f(z)\,dz$$



Εφαρμογή (Θεώρημα Cauchy-Goursat)

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int_c 2^z dz$, β) $\int \eta\mu z\, dz$, γ) $\int \frac{2z+3}{z^2-6z+13} dz$

ΛΥΣΗ

όπου (c) : $z(t) = \cos t + i\sin t$, $t\in[0,2\pi]$

α) Η καμπύλη (c) είναι ο δίσκος κέντρου το 0 και ακτίνας 1
Έτσι, ο τόπος $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\leq 1\}$ είναι απλά συνεκτικός
και η (c) κλειστή καμπύλη του D, f ολόμορφη στο D.
Άρα, από Θεώρημα Cauchy-Goursat, ισχύει:

$\int_c 2^z dz = 0$.

β) $f(z) = \eta\mu z$ ολόμορφη στον τόπο D.
από Θεώρημα Cauchy-Goursat, ισχύει:

$\int_c \eta\mu z\, dz = 0$

γ) Το τριώνυμο $z^2-6z+13$ έχει ρίζες:

$z_{1,2} = 3\pm 2i$.

Αλλά, $3\pm2i \notin D$ (διότι $|3\pm2i| = \sqrt{13} > 1$)

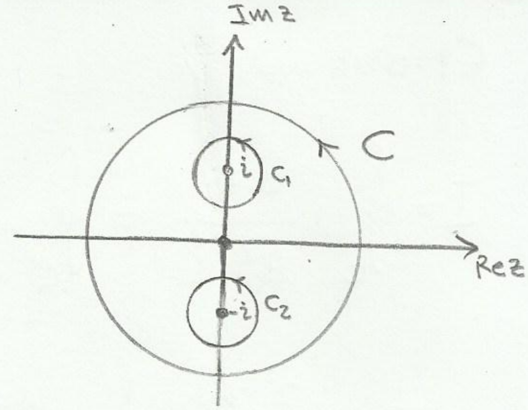
Άρα, $f(z) = \frac{2z+3}{z^2-6z+13}$ είναι ολόμορφη στο D.

Από Θεώρημα Cauchy-Goursat:

$$\int_c \frac{2z+3}{z^2-6z+13} dz = 0$$

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+1}, \quad \text{όπου} \quad C=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=2\}$$



ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ ορίζεται για κάθε $z\neq \pm i$ και είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$ (πολλαπλά συνεκτικό)

Όμως, $\pm i \in C$. Για αυτό το σκοπό θεωρούμε τους κύκλους C_1 και C_2 ακτίνας $\frac{1}{2}$ και κέντρων i και $-i$ αντίστοιχα. (C, C_1, C_2 κατά τμήματα διαφορίσιμες καμπύλες και θετικά προσανατολισμένες)

$C_1=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-i|=\frac{1}{2}\}$, $C_2=\{z\in\mathbb{C} \mid |z+i|=\frac{1}{2}\}$.

Προτού εφαρμόσουμε το Πόρισμα του θεωρήματος Cauchy-Goursat, θα διασπάσουμε το κλάσμα $\frac{1}{z^2+1}$ σε άθροισμα (απλών) κλασμάτων.

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{(z-i)(z+i)}=\frac{A}{z-i}+\frac{B}{z+i} \Leftrightarrow$$

$$1=A(z+i)+B(z-i) \Leftrightarrow$$

$$1=(A+B)z+i(A-B) \Longleftrightarrow$$

$A+B=0$ και $i(A-B)=1$

$A=-B$ και $2Ai=1 \Rightarrow A=-\frac{i}{2}$

Άρα, $B=\frac{i}{2}$.

Επομένως,

$$I = \oint_c \frac{dz}{z^2+1} = \oint_c \frac{-i/2}{z-i}\,dz + \oint_c \frac{i/2}{z+i}\,dz =$$

$$= -\frac{i}{2}\oint_c \frac{1}{z-i}\,dz + \frac{i}{2}\oint \frac{1}{z+i}\,dz \,. \ (*)$$

Τώρα, από το Πόρισμα του Θεωρήματος Cauchy-Goursat.

$$\oint_c \frac{1}{z-i}\,dz = \oint_{c_1} \frac{1}{z-i}\,dz \quad \text{και}$$

$$\oint_c \frac{1}{z+i}\,dz = \oint_{c_2} \frac{1}{z+i}\,dz$$

Για το πρώτο:

$$|z-i| = \frac{1}{2} \rightarrow z-i = \frac{1}{2}(\cos t + i\sin t) = \frac{1}{2}e^{it} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (C_1):\ z(t) = i + \frac{1}{2}e^{it}, \quad \forall t \in [0,2\pi]$$

Άρα,

$$\oint_c \frac{1}{z-i}\,dz = \oint_{c_1} \frac{1}{z-i}\,dz := \int_0^{2\pi} f(z(t))\cdot z'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\cancel{i}+\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{e^{it}}-\cancel{i}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\,i\cancel{e^{it}}\right)dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = [i\,t]_0^{2\pi} = 2\pi i$$

Όμοια και το δεύτερο:

$$\oint_c \frac{1}{z+i}\,dz = \oint_{c_2} \frac{1}{z+i}\,dz = \ldots = 2\pi i$$

Άρα, η (*) είναι: $I = -\frac{i}{2}\cdot 2\pi i + \frac{i}{2}2\pi i = 0$

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I=\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n}\ ,\ n\in\mathbb{N}^*$$ και C απλή κλειστή και

κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη

ΛΥΣΗ

Έστω $f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^n}$ ολόμορφη στον τόπο $D=\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$

- Αν $z_0 \notin$ στο εσωτερικό της C, τότε από Cauchy-Goursat

$$\oint \frac{dz}{(z-z_0)^n}=0$$

- Αν $z_0\in$ στο εσωτερικό της C, τότε θα υπάρχει κύκλος C_1 κέντρου z_0 και ακτίνας ρ τ/ω $f(z)$ ολόμορφη στον τόπο (Ω) μεταξύ των καμπυλών C και C_1. Τοτεσουν:

$$I=\oint_C f(z)dz=\oint_{C_1} f(z)\,dz.$$

(Το γεγονός ότι υπάρχει ο παραπάνω κύκλος είναι καθαρά τοπολογικό. Δηλαδή, εφόσον $z_0\in\Gamma^\circ$, με Γ το σύνολο εντός της καμπύλης C τότε θα $(\exists\, \rho>0)\ B(z_0,\rho)\subseteq\Gamma$, άρα είναι απόλυτα λογικός ο ισχυρισμός αυτός)

Η παραμετρική εξίσωση του κύκλου είναι (όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα)

$$z=z_0+\rho e^{it}\ ,\ t\in[0,2\pi]$$

Έτσι, $I=\int_0^{2\pi} f(z(t))\,z'(t)\,dt=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{(\rho\cdot e^{it})^n}\rho i e^{it}\right]dt$ (*)

Για $n=1 \xrightarrow{(*)} I=2\pi i$

Για $n>1 \xrightarrow{(*)} I=\int_0^{2\pi} i(\rho e^{it})^{1-n}dt = \rho^{1-n} \cdot i\int_0^{2\pi} e^{(1-n)it}dt =$

$= \rho^{1-n} \cdot i \left[\frac{1}{(1-n)i} e^{(1-n)it}\right]_0^{2\pi} = \frac{\rho^{1-n}}{1-n}\left(e^{(1-n)2\pi i}-1\right) \overset{(1)}{=} 0$.

Αποδ. βηματος (1)

$e^{(1-n)2\pi i} = \cos[(1-n)2\pi] + i\,\eta\mu[(1-n)2\pi] = 1$

Αρα, λοιπον

$$\oint_c \frac{dz}{(z-z_0)^n} = 0 \quad , \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$$